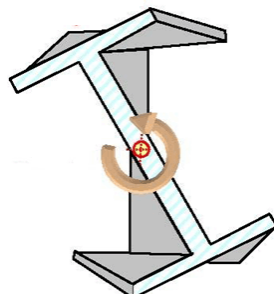




Cours

CHAPITRE 8

Mécanique appliquée : RDM

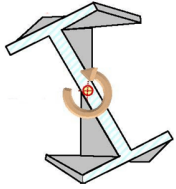




Introduction	1
Efforts de cohésion - Coupure	2
Notion de contrainte	3
Sollicitation simple – Traction	4
Sollicitation simple – Cisaillement	5
Sollicitation simple – Flexion	6
Sollicitation simple – Torsion	7
Coefficient de sécurité	8
Synthèses sollicitations simples	9
Sollicitations composées	10
Principe de superposition	11
Graphes des efforts et des moments	12
Méthode de résolution des problèmes de RDM	13

Annexes :

- A1 - Moments quadratiques
- A2 - Concentration de contraintes TRACTION
- A3 - Concentration de contraintes TORSION
- A4 - Concentration de contraintes FLEXION
- A5 - Concentration de contraintes FILETAGE
- A6 - Déformée sur appuis
- A7 - Déformée encastrement



RESISTANCE DES MATERIAUX

Généralités

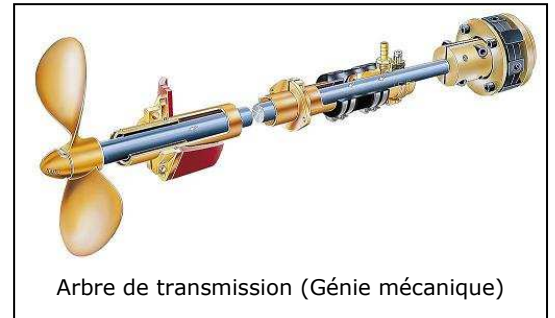
1 – PREAMBULE

La **Résistance Des Matériaux (RDM)** est une science appliquée (de la mécanique appliquée) qui a pour finalité le **dimensionnement des organes des machines** (⇒ **génie mécanique**) ou **des bâtiments** (⇒ **génie civil**).

La RDM est issue de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) à laquelle on adjoint quelques hypothèses relatives à la géométrie du solide étudié et aussi au comportement du matériau. Ce faisant, les équations initialement très complexes de la MMC se trouvent grandement simplifiées et on peut traiter « rapidement » de nombreux problèmes pour peu que le solide étudié respecte bien les hypothèses avancées.

La RDM s'appelle aussi « **théorie des poutres** ».

Il existe aussi la « **théorie des plaques** » et la « **théorie des coques** », elles aussi issues de la MMC.



Arbre de transmission (Génie mécanique)



Pont (Génie civil)

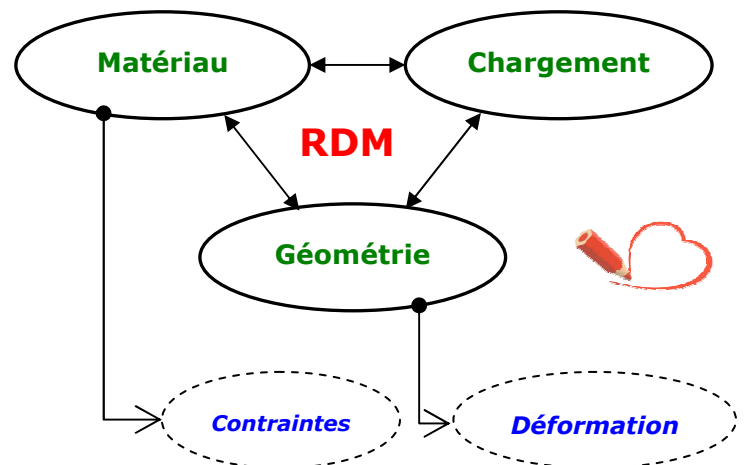
2 – GRANDEURS MISES EN JEU

La MMC – et donc la RDM – permettent de relier les trois éléments suivants :

- ⇒ Le **chargement** subi par le système (efforts),
- ⇒ Le(s) **matériau(x)** (caractéristiques mécaniques),
- ⇒ La **géométrie** du système (formes et dimensions)

De cette mise en relation en sort deux autres grandeurs importantes :

- ⇒ L'état de **contraintes** au sein de la matière,
- ⇒ L'état de **déformations** de la matière.



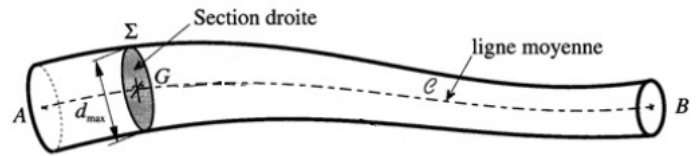
Dimensionner un organe (un arbre de transmission, une structure porteuse, etc.) consiste à se fixer a priori deux grandeurs (efforts et/ou matériau et/ou géométrie) pour en déduire la troisième en respectant un état de contraintes limite (si on ne veut pas que ça casse par exemple) et/ou un état de déformations limite si le cahier des charges l'impose.

3 – HYPOTHESES DE LA RDM

La théorie de la RDM n'est valable que si les **quatre** points suivants sont vérifiés :

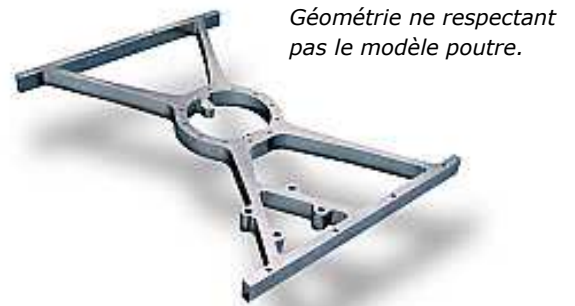
* La géométrie du solide présente une dimension beaucoup plus grande que les deux autres.

C'est le cas si $d_{max} \ll AB$



- ⇒ On parle alors de « modèle poutre ».
- ⇒ La ligne moyenne AB (ou ligne neutre) n'est pas nécessairement rectiligne.
- ⇒ La section droite Σ n'est pas nécessairement constante le long de AB .

Si la géométrie ne respecte pas cette hypothèse, on peut recourir à la simulation numérique avec un logiciel de CAO.

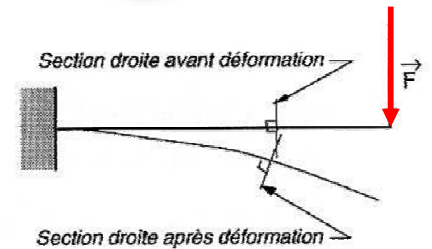


Exemple : la géométrie de la pièce ci-contre ne s'apparente pas à une poutre car il n'y a pas une dimension plus grande que les deux autres.

Les équations de la RDM ne peuvent donc pas s'appliquer et il faut recourir à celles de MMC ou bien à la simulation logicielle.

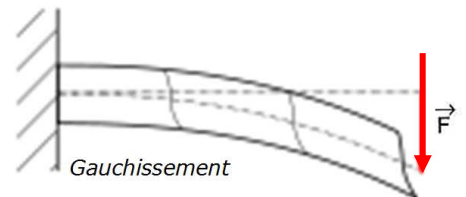
* Les sections droites Σ restent **perpendiculaires à la ligne moyenne** lorsque la poutre se déforme.

⇒ C'est l'hypothèse de Bernoulli.



* Les sections droites Σ initialement planes **restent planes** lorsque la poutre se déforme (pas de gauchissement des sections).

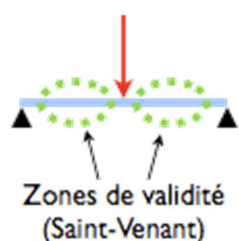
⇒ C'est l'hypothèse de Navier-Bernoulli. Elle implique qu'on reste en petites déformations.



* Le matériau de la poutre est **homogène, isotrope** et a un comportement « **élastique linéaire*** ».

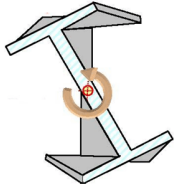
* Élastique linéaire \Leftrightarrow suit la loi de Hooke (voir la section « Matériaux » >> Essai de traction »).

4 – LIMITE DE VALIDITE DES RESULTATS – PRINCIPE DE SAINT-VENANT



Outre le fait que les hypothèses évoquées doivent être (suffisamment bien) vérifiées pour avoir des résultats fiables, **les résultats fournis par la RDM sont valables loin des points d'appui et des charges concentrées**.

C'est le principe de Saint-Venant.



RESISTANCE DES MATERIAUX

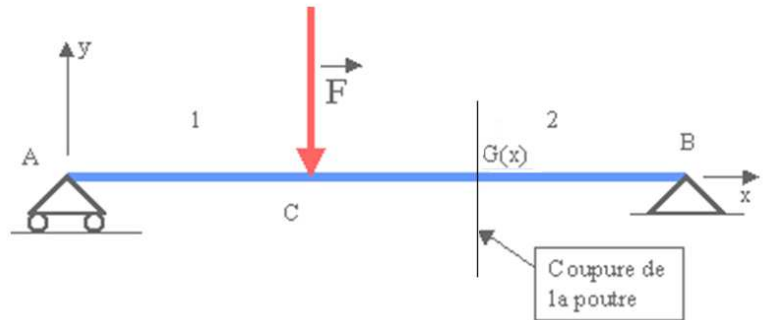
Efforts de cohésion - Coupure

1 – PREAMBULE

Si une poutre est censée vérifier le PFD, alors toute partie de cette poutre doit également le vérifier. En effet, il n'est pas possible d'avoir un système à l'équilibre et une partie de ce même système qui ne le serait pas ou inversement.

2 – PRINCIPE DE LA COUPURE

Considérons la poutre $[AB]$, à l'équilibre sur 2 appuis simples en A et B et subissant une charge concentrée connue \vec{F} au point C .



1 Recherche des tronçons :

(AC) , délimité par le point d'appui A et le point d'application C de la charge concentrée \vec{F} .

(CB) , délimité par le point d'application C de la charge concentrée \vec{F} et le point d'appui B .

2 Création d'une coupure fictive au point G d'abscisse x .

Le point G peut se « balader » entre A et B :

⇒ Si $0 \leq x_G \leq x_C$ alors on est dans le tronçon (AC) .

⇒ Si $x_C \leq x_G \leq x_B$ alors on est dans le tronçon (CB) .

Cette coupure permet d'identifier une « partie gauche » (AG) et une « partie droite » (GB) .

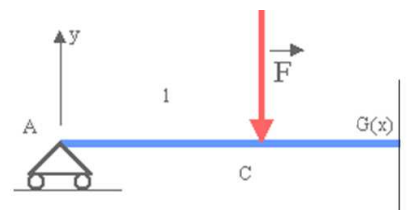
Comme on l'a déjà dit, si toute la poutre est à l'équilibre, il va de soi qu'une partie de la poutre l'est aussi. La partie gauche (AG) est donc à l'équilibre, tout comme la partie droite (GB) .

3 Etude statique de la partie gauche (AG) :

⇒ BAME (3 efforts) :

$\{A\}$ en A , $\{F\}$ en C , $\{T_{coh}\}$, en $G(x)$, effort de la partie droite sur la partie gauche qui est du à la **cohésion de la matière**.

⇒ PFS : $\{A\} + \{F\} + \{T_{coh}\} = \{0\} \Rightarrow \{T_{coh}\} = -\{A\} - \{F\}$ (le torseur des efforts de cohésion est ainsi connu)



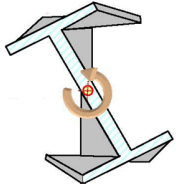
3 – COMPOSANTES DU TORSEUR DES EFFORTS DE COHESION

$${}_G \{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \\ M_t \cdot \vec{x} + M_{fy} \cdot \vec{y} + M_{fz} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

avec

- N Effort normal \vec{x}
- T_y Effort tranchant sur \vec{y}
- T_z Effort tranchant sur \vec{z}
- M_t Moment de torsion \vec{x}
- M_{fy} Moment de flexion sur \vec{y}
- M_{fz} Moment de flexion sur \vec{z}

La connaissance du torseur des efforts de cohésion permet de déterminer le type de sollicitations du tronçon.



RESISTANCE DES MATERIAUX

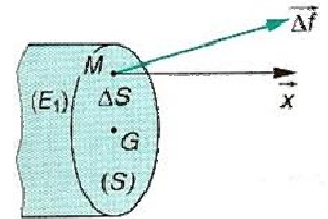
Notion de contrainte

1 – PREAMBULE

Le torseur de cohésion permet d'exprimer au centre d'une section droite les actions mécaniques internes exercées par un tronçon sur l'autre mais il ne permet pas de définir la **répartition de ces efforts dans la surface** de la section. Pour cela, on fait appel à la notion de **contrainte**...

2 – DEFINITION DE LA CONTRAINTE

Prenons un point M appartenant à la surface (S) de la section droite de la poutre au niveau de la coupure de centre G . Prenons une surface élémentaire Δs qui entoure le point M . Sur cette surface élémentaire Δs s'applique une force élémentaire $\overrightarrow{\Delta f}$.



Il va de soit que si on additionne toutes les forces élémentaires $\overrightarrow{\Delta f}$, on obtient la force totale qu'exerce la partie droite sur la partie gauche, c'est à dire la résultante du torseur de cohésion :

$$\overrightarrow{R_{coh}} = \sum \overrightarrow{\Delta f} \text{ ou encore } \overrightarrow{R_{coh}} = \int_S \overrightarrow{df}$$

On appelle vecteur contrainte au point M relativement à la surface Δs de normale \vec{x} le vecteur $\overrightarrow{C(M, \vec{x})}$ tel que :

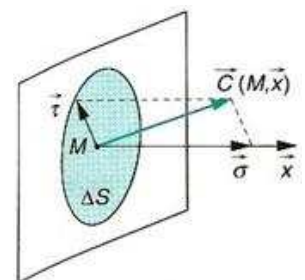
$$\overrightarrow{C(M, \vec{x})} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{df}}{ds}$$

Unité légale : La contrainte étant le rapport d'une force par une surface, l'unité légale est donc le $N \cdot m^2$, donc le Pa .

Unité pratique : En RDM, on utilise souvent le MPa avec : $1 MPa = 10^6 Pa = 1 N \cdot mm^2$

3 – COMPOSANTES NORMALE ET TANGENTIELLES

Dans le cas générale, la force élémentaire $\overrightarrow{\Delta f}$ a une orientation quelconque et en conséquence il en va de même pour le vecteur contrainte $\overrightarrow{C(M, \vec{x})}$.



Aussi, on peut décomposer le vecteur contrainte $\overrightarrow{C(M, \vec{x})}$ avec :

- ↗ Une composante perpendiculaire à la surface Δs , appelée **composante normale** et notée $\vec{\sigma}$.
- ↗ Une composante comprise dans la surface Δs , appelée **composante tangentielle** et notée $\vec{\tau}$.

Ainsi, le vecteur contrainte s'écrit : $\overrightarrow{C(M, \vec{x})} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$ ou encore :

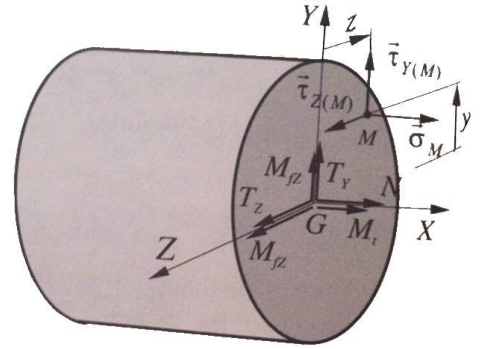
$$\overrightarrow{C(M, \vec{x})} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$$

4 – RELATIONS GENERALES ENTRE CONTRAINTES ET EFFORT DE COHESION

Prenons un point M dans la section droite d'abscisse $G(x)$.

Prenons une surface élémentaire ds autour du point M .

Sur cette surface élémentaire la partie droite exerce sur la partie gauche une force de cohésion élémentaire \vec{df} .



Sous forme de torseur, en M , on a : $\{dT_{coh}\}_M = \begin{Bmatrix} \vec{df} = \vec{C} \cdot ds \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Transporté en G, on a : $\{dT_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{df} = \vec{C} \cdot ds \\ \overline{dM_G}(\vec{df}) = \overline{GM} \wedge \vec{df} = \overline{GM} \wedge \vec{C} \cdot ds \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

avec $\overline{GM} = y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$ et $\vec{C} = \sigma \cdot \vec{y} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$

soit, $\{dT_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \sigma \cdot ds & (y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y) \cdot ds \\ \tau_y \cdot ds & z \cdot \sigma \cdot ds \\ \tau_z \cdot ds & y \cdot \sigma \cdot ds \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

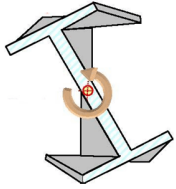
Par identification avec le torseur des efforts de cohésion $\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ \tau_y & M_{fy} \\ \tau_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

on obtient les **relations fondamentales** suivantes :

$N = \int_S \sigma \cdot ds \quad (1)$	$M_t = \int_S (y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y) \cdot ds \quad (4)$
$T_y = \int_S \tau_y \cdot ds \quad (2)$	$M_{fy} = \int_S z \cdot \sigma \cdot ds \quad (5)$
$T_z = \int_S \tau_z \cdot ds \quad (3)$	$M_{fz} = \int_S y \cdot \sigma \cdot ds \quad (6)$

↪ Ces relations seront utilisées dans les études des différents cas de sollicitations.

↪ Elles ne sont pas directement utiles pour résoudre des problèmes de RDM.



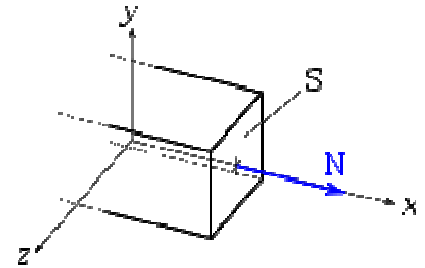
RESISTANCE DES MATERIAUX

Traction

1 – SOLLICITATION

Une poutre est sollicitée en traction si le tenseur de cohésion se réduit à :

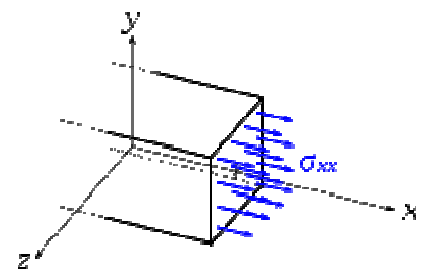
$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



2 – CONTRAINTE

L'hypothèse de Navier-Bernoulli implique que la contrainte σ soit constante en tout point M de la section sollicitée donc :

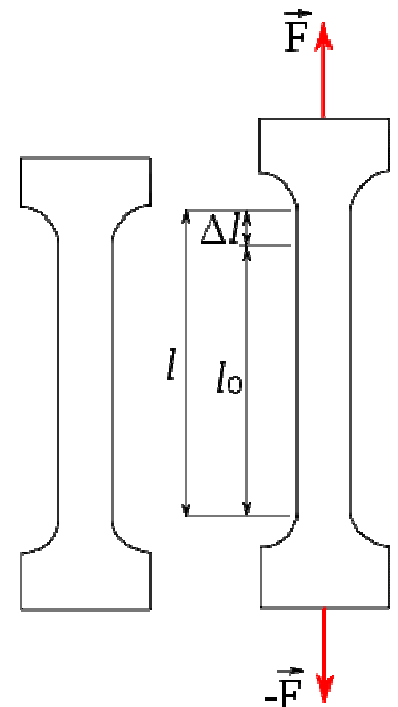
$$(1) \Rightarrow N = \int_S \sigma \cdot ds \Rightarrow \sigma \cdot \int_S ds = \sigma \cdot S$$



D'où l'expression de la contrainte :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

N : effort normal (N)
 S : section sollicitée (mm²)
 σ : contrainte normale (MPa ou N/mm²)



3 – DEFORMATION

Soumise à une charge \vec{F} , la poutre s'allonge de Δl .

la déformation ε est :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$



4 – RELATION CONTRAINTE / DEFORMATION

Il s'agit ici de la loi de Hooke élaborée à partir de l'essai de traction :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$



5 – CONDITION DE RESISTANCE

Le dimensionnement se fait toujours dans le domaine élastique. Aussi, pour que la pièce ne casse pas, il faut que la **contrainte maximale reste inférieure à ce que le matériau peut supporter** :


$$\sigma < R_e$$



La limite de résistance élastique R_e est toutefois minorée selon l'incertitude qu'on a sur les charges (surcharge, choc) et sur la qualité du matériau. On introduit donc un **coefficient de sécurité**, s , qui donne la résistance pratique à l'extension, R_{pe} telle que :

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$



 Le coefficient de sécurité s est déterminé par un tableau.

La condition de résistance devient donc :

$$\sigma < R_{pe}$$

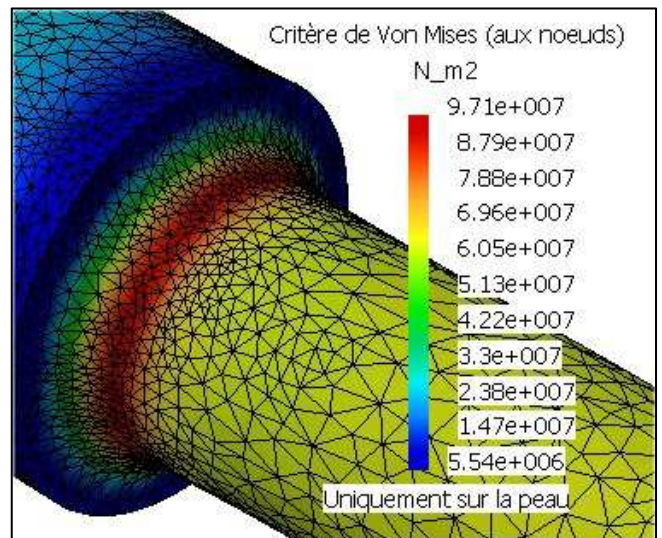



Enfin, la géométrie de la poutre n'est pas forcément idéale : il peut y avoir un épaulement, une gorge, un filetage, etc.

Ces variations de géométrie induisent des **concentrations de contraintes** qu'il faut prendre en compte pour le dimensionnement.

En traction, le coefficient se nomme K_t et on a :

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$$

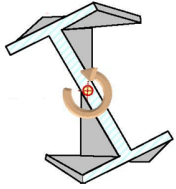


 Le coefficient de concentration de contrainte K_t est déterminé par le calcul ou à l'aide d'abaques.

La condition de résistance devient donc :

$$\sigma_{max} < R_{pe}$$





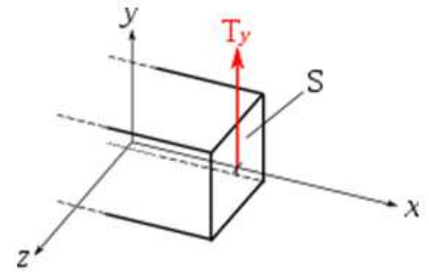
RESISTANCE DES MATERIAUX

Cisaillement

1 – SOLLICITATION

Une poutre est sollicitée au cisaillement si le torseur de cohésion se réduit à :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (\text{ou } T_z)$$

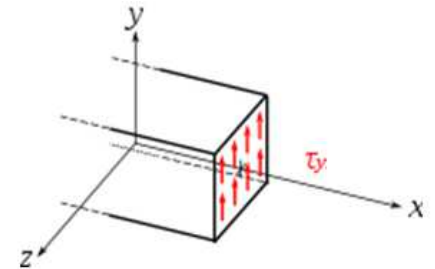


2 – CONTRAINTE

L'hypothèse de Navier-Bernoulli implique que la contrainte τ soit constante en tout point M de la section sollicitée donc :

$$(2) \Rightarrow T_y = \int_S \tau_y \cdot ds = \tau_y \cdot \int_S ds = \tau_y \cdot S$$

D'où l'expression de la contrainte : $\tau_y = \frac{T_y}{S}$ ou $\tau_z = \frac{T_z}{S}$



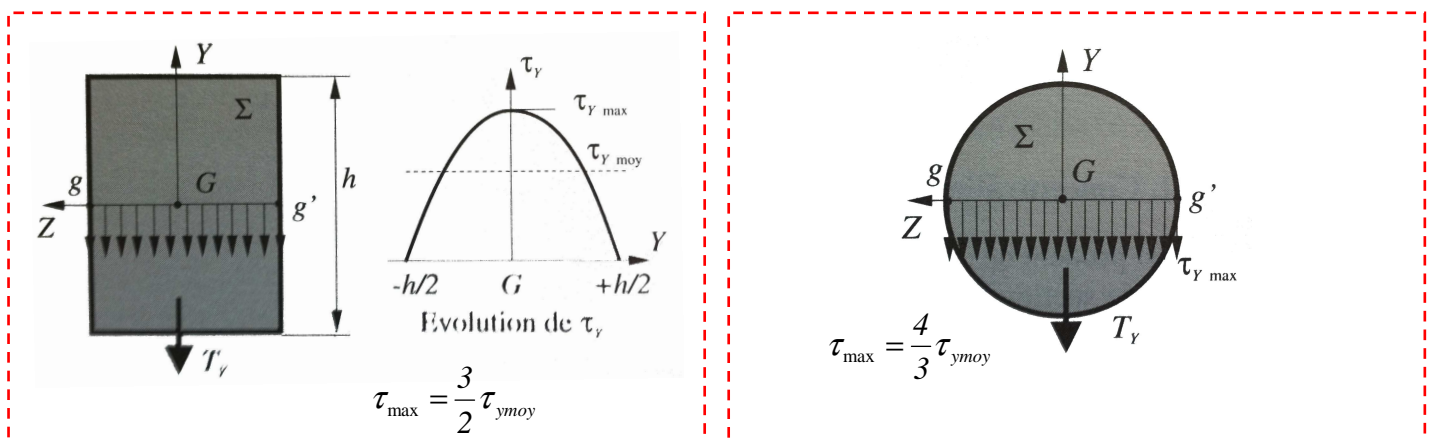
On retiendra celle-ci :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

avec $\begin{cases} T : \text{effort tranchant (N)} : T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} \\ S : \text{section sollicitée (mm}^2\text{)} \\ \tau : \text{contrainte tangentielle (MPa ou N} \cdot \text{mm}^{-2}\text{)} \end{cases}$

Modèle affiné : l'expérience montre qu'en réalité, la répartition des contraintes n'est pas uniforme. Dans ce cas, l'expression précédente ne donne qu'une contrainte moyenne : $\tau_{moy} = \frac{T}{S}$.

Quant à la contrainte maximale, elle dépend de la géométrie de la section ; voici deux cas usuels :

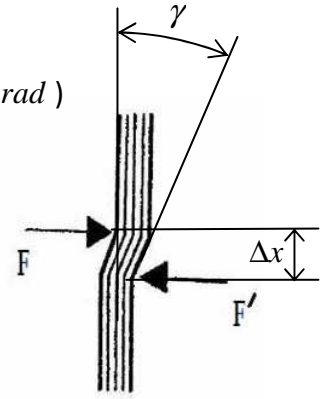


3 – DEFORMATION

On note :

γ : angle de glissement des sections droites les unes par rapport aux autres (rad)

Δx très petit (sinon ce n'est plus du cisaillement)



4 – RELATION CONTRAINTE / DEFORMATION

On montre que :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

↳ Très peu utilisé dans la pratique.

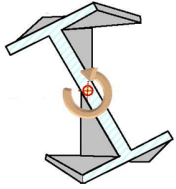
5 – CONDITION DE RESISTANCE

Le dimensionnement se fait toujours dans le domaine élastique. La limite de résistance au glissement R_g est minorée avec un coefficient de sécurité s :

$$R_{pg} = \frac{R_g}{s}$$

La condition de résistance devient donc :

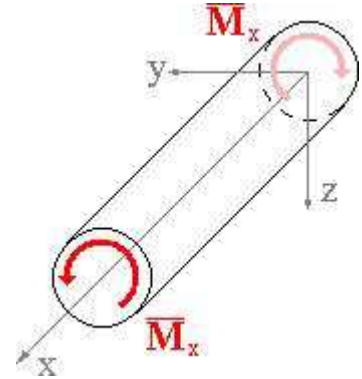
$$\tau < R_{pg}$$



1 – SOLLICITATION

Une poutre est sollicitée à la torsion si le torseur de cohésion se réduit à :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



Remarque importante : on se limite ici à l'étude des poutres de section circulaire pleine ou creuse.

2 – CONTRAINTE

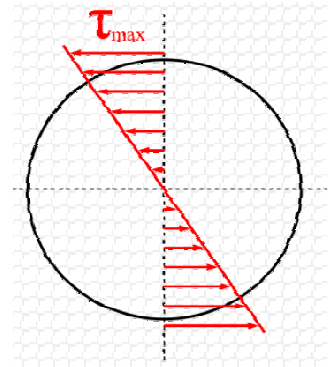
Partant de l'équation générale (4) : $M_t = \int_S (y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y) \cdot ds$

on montre que la contrainte est :

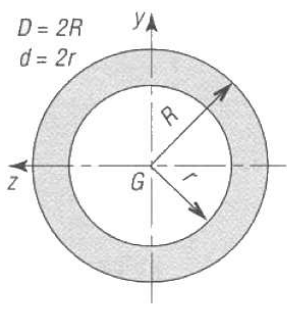
$$\tau = \frac{M_t}{\left(\frac{I_o}{\rho}\right)}$$

avec

- M_t : moment de torsion ($N \cdot mm$)
- I_o : moment quadratique polaire (mm^4)
- ρ : rayon (mm)
- τ : contrainte tangentielle (MPa ou $N \cdot mm^{-2}$)



Moments quadratiques utiles en torsion :



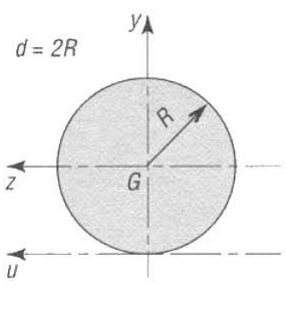
$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$$

$$= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$I_G = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)$$

$$= \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = I_y + I_z$$



$$S = \pi R^2$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_u = \frac{5 \pi R^4}{4} = \frac{5 \pi d^4}{64}$$

$$I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_y + I_z$$

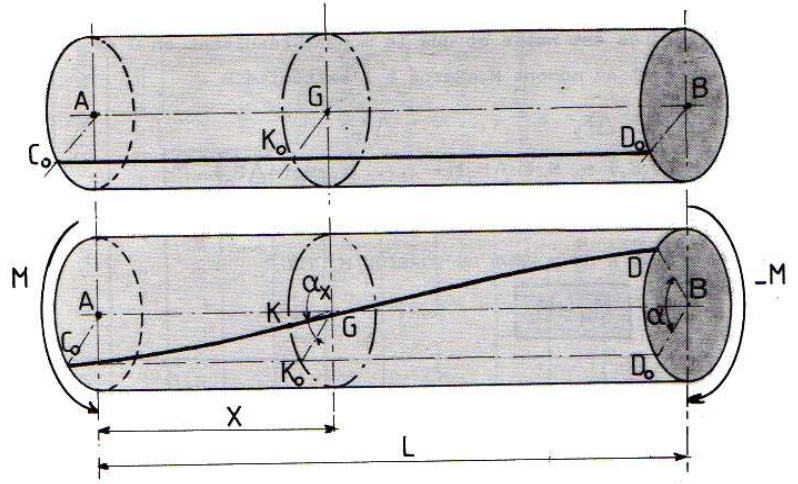
3 – DEFORMATION - ANGLE UNITAIRE DE TORSION

On constate que :

↪ La longueur L de la poutre ne varie pas (elle reste constante)

$$\frac{\alpha_x}{X} = \dots = \frac{\alpha}{L} = \theta$$

θ s'appelle l'angle unitaire de torsion (en rad/m ou rad/mm)



4 – RELATION CONTRAINTE / DEFORMATION

On montre que la contrainte est :

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G : \text{module d'élasticité transversal (MPa)} \\ \theta : \text{angle unitaire de torsion (rad} \cdot \text{mm}^{-1}\text{)} \\ \rho : \text{rayon (mm)} \\ \tau : \text{contrainte tangentielle (MPa ou N} \cdot \text{mm}^{-2}\text{)} \end{array} \right.$$

5 – CONDITION DE RESISTANCE

Le dimensionnement se fait toujours dans le domaine élastique.

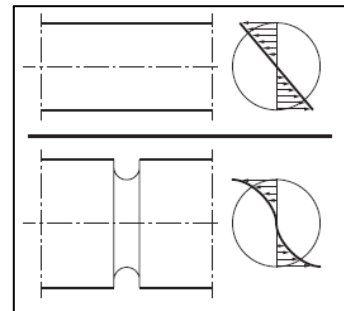
La limite de résistance au glissement R_g est minorée avec un **coefficient de sécurité** : $R_{pg} = \frac{R_g}{s}$

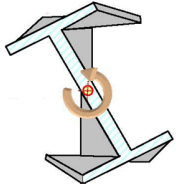
D'autre part, la pièce peut présenter des accidents (épaulements, etc.) d'où des **concentrations de contraintes** et donc l'introduction du coefficient de concentration de contraintes en torsion K_t :

$$\tau_{max} = K_t \times \tau$$

La condition de résistance devient donc :

$$\tau_{max} < R_{pg}$$





RESISTANCE DES MATERIAUX

Flexion

1 – SOLLICITATION

Une poutre est sollicitée à la flexion pure si le torseur de cohésion se réduit à :

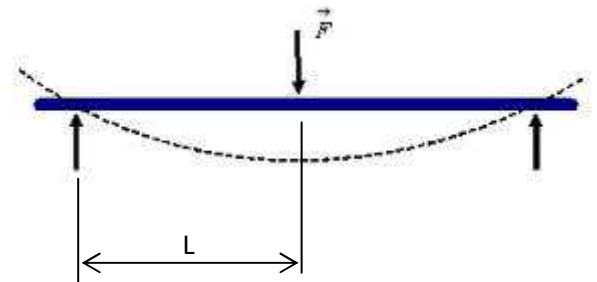
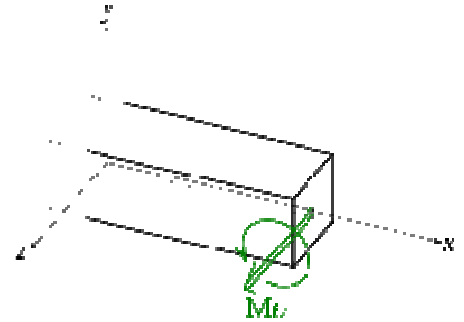
$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ou M_{fy} ou les deux : $M_f = \sqrt{M_{fy}^2 + M_{fz}^2}$

On rencontre aussi très souvent la flexion simple :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Flexion simple = cisaillement + flexion pure

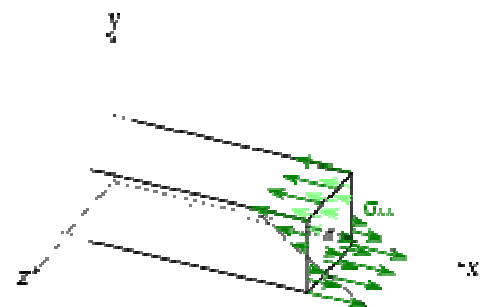


2 – CONTRAINTE DUE AU MOMENT DE FLEXION UNIQUEMENT

Partant de l'équation générale (6) : $M_{fz} = \int_S y \cdot \sigma \cdot ds$

on montre que la contrainte est :

$$\sigma = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_{GZ}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M_{fz} : \text{moment de flexion (N} \cdot \text{mm)} \\ I_{GZ} : \text{moment quadratique (mm}^4\text{)} \\ y : \text{rayon (mm)} \\ \sigma : \text{contrainte normale (MPa ou N} \cdot \text{mm}^{-2}\text{)} \end{cases}$$



On constate que la contrainte σ n'est pas uniforme dans la section mais dépend de la cote y du point M (en considérant un moment de flexion sur l'axe \vec{z}).

- ↪ La contrainte est nulle quand $y = 0$ (on est sur la ligne neutre)
- ↪ La contrainte est du signe du moment de flexion pour $y > 0$ (traction par exemple)

↪ La contrainte est du signe opposé à celui du moment de flexion pour $y < 0$ (compression par exemple)

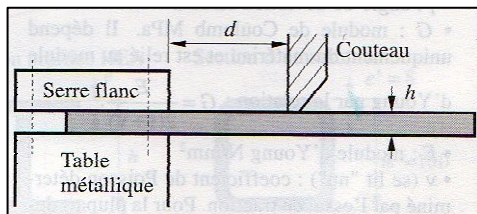
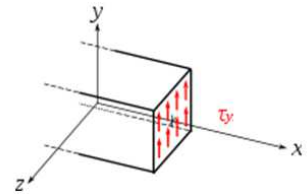
↪ La contrainte est maximale pour $y = |y_{max}|$.

On trouve souvent cette formule écrite comme ceci : $\sigma = \frac{M_{fz}}{\left(\frac{I_{GZ}}{y}\right)}$ car on voit apparaître le rapport $\left(\frac{I_{GZ}}{y}\right)$ qui s'appelle le « **module de flexion** ».

Pour des profilés standards (poutrelles), il est directement donné dans les tableaux de caractéristiques ce qui est très pratique...

3 – CONTRAINTE DUE A LA FORCE DE CISAILEMENT UNIQUEMENT

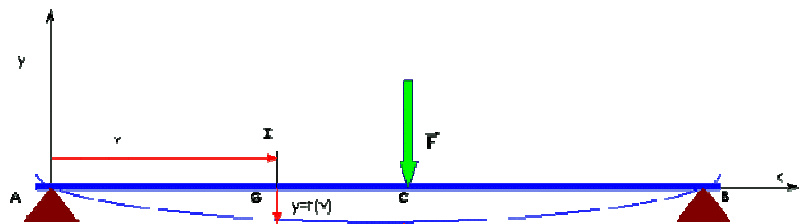
On a vu en étudiant le cisaillement que la contrainte est donnée par : $\tau_y = \frac{T_y}{S}$



Remarque importante : on a donc une **sollicitation composée** mais, si la longueur d est suffisamment grande, on monte que **la contrainte de flexion est prépondérante face à celle du cisaillement** (si la poutre casse, c'est à cause de la flexion et non du cisaillement).

4 – DEFORMATION

On appelle « **déformée** » la courbe associée à la ligne neutre lorsque la poutre est chargée.



On montre que l'équation de la déformée est donnée par une équation différentielle :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}(x)}{E \cdot I_{GZ}}$$

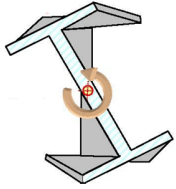
5 – CONDITION DE RESISTANCE

Le dimensionnement se fait toujours dans le domaine élastique.

Si on ne retient que la contrainte normale due à la flexion (on néglige le cisaillement), alors la condition de résistance est :

$$\sigma_{max} < R_{pe}$$

σ_{max} prend en compte un éventuel coefficient de concentration de contrainte.




RESISTANCE DES MATERIAUX

Coefficient de sécurité

1 – SOURCES D'INCERTITUDES

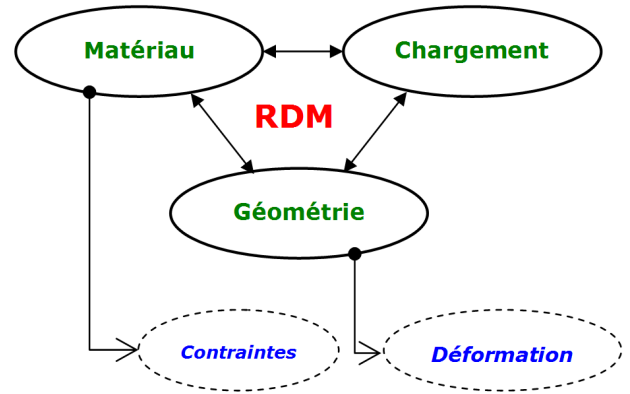
Il existe toujours des incertitudes sur les caractéristiques du matériau, tout comme sur la connaissance des efforts, s'il y aura des chocs ou pas, etc. De plus, la géométrie de la pièce étudiée respecte plus ou moins bien les hypothèses de la RDM.

Pour considérer ces incertitudes lors du dimensionnement, on introduit dans le critère de résistance un coefficient appelé coefficient de sécurité ; il est noté s et on a :



$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

$$R_{pg} = \frac{R_g}{s}$$

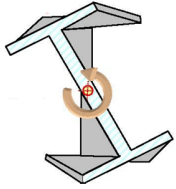


⇒ R_{pe} est la **résistance pratique à l'extension** et R_e la limite élastique du matériau.

⇒ R_{pg} est la **résistance pratique au glissement** R_g la limite élastique au glissement du matériau.

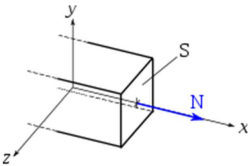
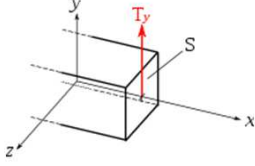
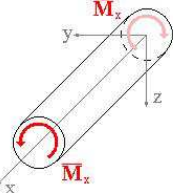
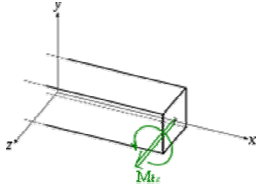
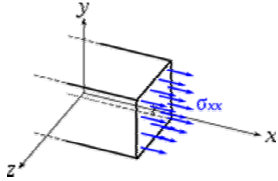
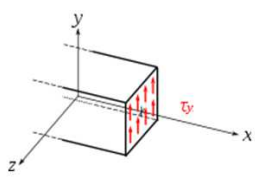
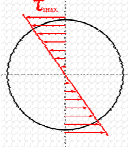
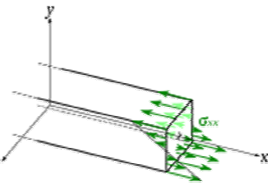
2 – VALEUR DU COEFFICIENT DE SECURITE

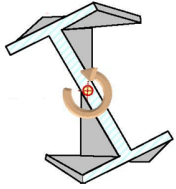
Coefficient de sécurité (s)	Conditions générale de calculs (sauf réglementation particulière)
1,5 à 2	Cas exceptionnels de grande légèreté. Hypothèse de charges surévaluées.
2 à 3	Construction où l'on cherche la légèreté (aviation). Hypothèse de calcul la plus défavorable (charpente avec vent ou neige, engrenages avec une seule dent en prise...).
3 à 4	Bonne construction, calculs soignés, haubans fixes.
4 à 5	Construction courante (légers efforts dynamiques non pris en compte. Treuils.)
5 à 8	Calculs sommaires, efforts difficiles à évaluer (cas de chocs, mouvements alternatifs, appareils de levage, manutention).
8 à 10	Matériaux non homogènes. Chocs, élingue de levage.
10 à 15	Chocs très importants, très mal connus (presse). Ascenseurs.



RESISTANCE DES MATERIAUX

Sollicitations simples - Synthèse

	Sollicitations simples			
	Traction	Cisaillement	Torsion	Flexion
Effort de cohésion	$\left\{ \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_R$ 	$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_R$ 	$\left\{ \begin{matrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_R$ 	$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{matrix} \right\}_R$ 
Contrainte	$\sigma = \frac{N}{S}$ 	$\tau = \frac{T}{S}$ 	$\tau = \frac{M_t}{\left(\frac{I_0}{\rho} \right)}$ 	$\sigma = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_{GZ}}$ 
Déformation	$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$	γ	$\theta = \frac{\alpha}{L}$	$y = y(x)$
Contrainte / déformation	$\sigma = E \cdot \varepsilon$	$\tau = G \cdot \gamma$	$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$	-
Effort / déformation	$\varepsilon = \frac{N}{S \cdot E}$	$\left(\gamma = \frac{T}{S \cdot G} \right)$	$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_0}$	$y''(x) = \frac{M_{fz}(x)}{E \cdot I_{GZ}}$
Condition de résistance	$\sigma \leq R_{pe}$	$\tau \leq R_{pg}$	$\tau \leq R_{pg}$	$\sigma \leq R_{pe}$
Energie de déformation	$W = \int_0^L \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot dx$	$W = \int_0^L \frac{T_y^2}{2 \cdot G \cdot S} \cdot dx$	$W = \int_0^L \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_0} \cdot dx$	$W = \int_0^L \frac{M_{fz}^2}{2 \cdot E \cdot I_{Gz}} \cdot dx$



RESISTANCE DES MATERIAUX

Sollicitations composées

1 – PREALABLE

Les organes mécaniques qui composent les systèmes sont rarement soumis à une seule sollicitation simple (on dire aussi « pure »), même si cela arrive. Exemple et contre-exemple :

$$\left\{ \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_R$$

Composant : câble de traction
Sollicitation **simple** : traction

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_t \end{matrix} \right\}_R$$

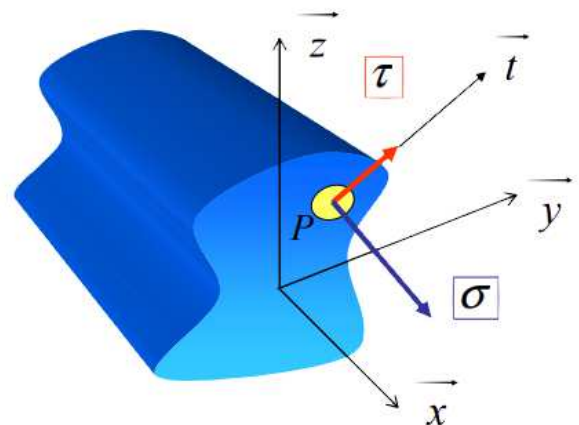
Composant : arbre à cames
Sollicitation **composée** : flexion + torsion

$$\left\{ \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{matrix} \right\}_R$$

Composant : vis d'assemblage
Sollicitation **composée** : traction + cisaillement

Problème : lorsqu'on a à faire à une pièce soumise à des sollicitations composées, les contraintes normale σ et tangentielle τ sont présentes en même temps.

Aussi, on ne peut pas comparer séparément σ avec R_e et τ avec R_s pour faire du dimensionnement.




⇒ On construit alors une contrainte équivalente, σ_{eq} , qui « résume » à elle seule l'effet de σ et de τ .

2 – CONTRAINTE EQUIVALENTE

Définition :

On note σ_{eq} la contrainte équivalente (en traction) qui résume à elle seule les effets combinés de la contrainte normale σ et de la contrainte tangentielle τ .

A noter :

 La contrainte normale σ peut résulter d'une sollicitation de traction et de flexion : $\sigma = \sigma_{traction} + \sigma_{flexion}$

La contrainte tangentielle τ peut résulter d'une sollicitation de cisaillement et de torsion : $\tau = \tau_{cis} + \tau_{tor}$

Il existe différentes relations pour calculer la contrainte équivalente σ_{eq} , selon notamment le type de matériau considéré (fragilité/ductilité, homogénéité, etc.).

On parle en fait de **critère de résistance**, les trois principaux étant ceux de *Rankine*, *Tresca* et *Von Mises* :

* Critère de « Rankine »

Cette théorie n'est confirmée dans la pratique que pour les matériaux fragiles et suffisamment homogènes (verre, gypse, céramiques,...)

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4.\tau^2}$$

* Critère de « Tresca »

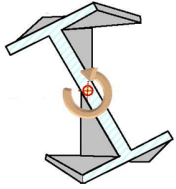
Cette théorie donne des résultats relativement satisfaisants pour les matériaux fragiles.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4.\tau^2}$$

* Critère de « von Mises »

Critère le plus utilisé, notamment par les modélisateurs volumiques.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3.\tau^2}$$



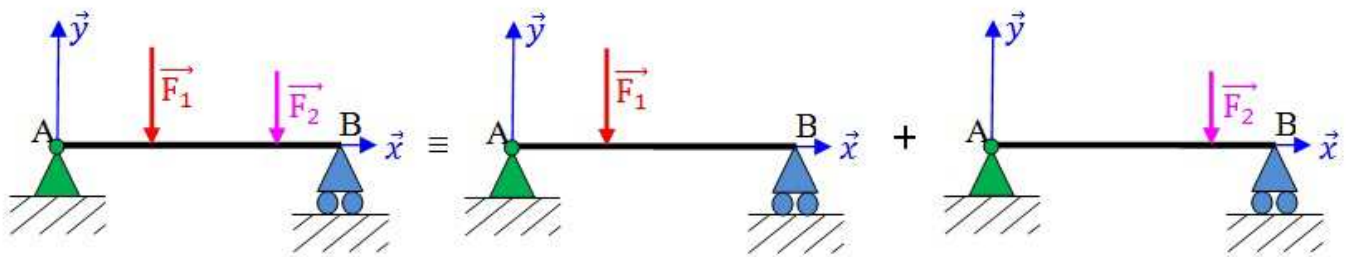
RESISTANCE DES MATERIAUX

Principe de superposition

1 – SITUATION

Considérons une poutre AB articulée en A et en appui simple en B. Soit \vec{F}_1 et \vec{F}_2 deux charges concentrées qui constituent le chargement extérieur.

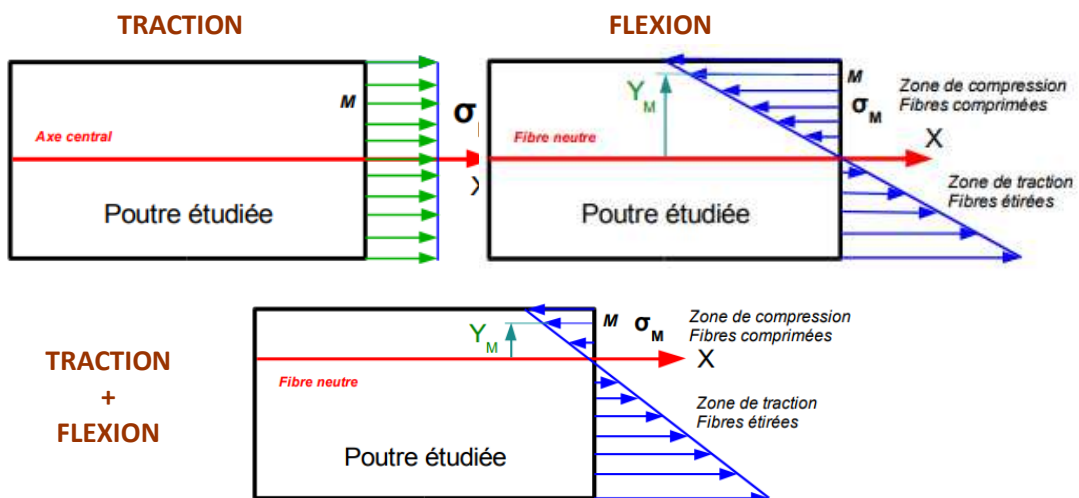
On montre que les résultats obtenus par sommation de ceux des études de la poutre avec uniquement \vec{F}_1 puis \vec{F}_2 donne le même résultat que l'étude unique intégrant les efforts \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :



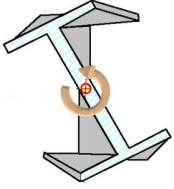
ETUDE 1	=	ETUDE 2	+	ETUDE 3
$\sigma_1(x_G)$	=	$\sigma_2(x_G)$	+	$\sigma_3(x_G)$
$\varepsilon_1(x_G)$	=	$\varepsilon_2(x_G)$	+	$\varepsilon_3(x_G)$

Utilité : permet de décomposer un problème « compliqué » en une somme de problèmes plus simples.

2 – EXEMPLE DE CONTRAINTES SUPERPOSEES [TRACTION + FLEXION]



La contrainte est évolutive : de nulle sur la fibre neutre à maximale à la périphérie de la section; avec comme différence un décalage de la fibre neutre due à l'addition ou soustraction de la contrainte de traction dans les différentes zones de flexion coté zone fibres comprimées ou étirées. Cette particularité de décalage de la fibre neutre entraîne une asymétrie dans les contraintes ; cette asymétrie pourra être compensée ou régulée par la création d'un profil asymétrique.



1 – RAPPEL

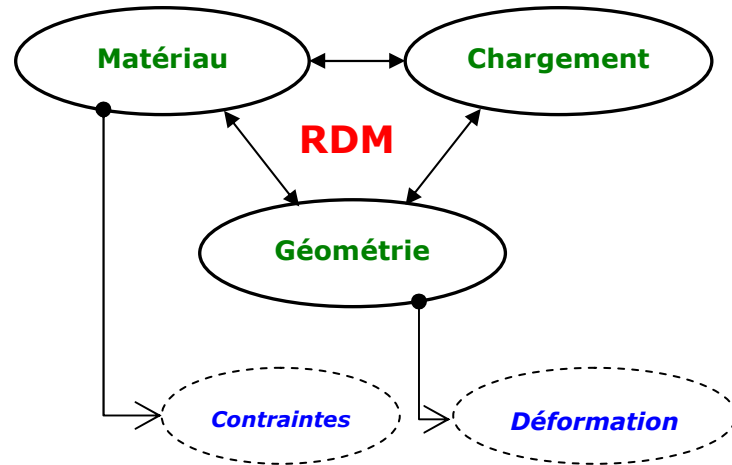
* La Résistance Des Matériaux (RDM) est une science appliquée qui a pour finalité le **dimensionnement des organes des machines** (⇒ **génie mécanique**) ou **des bâtiments** (⇒ **génie civil**).

* La RDM (comme la MMC) permet de relier les trois éléments suivants :

- ⇒ Le **chargement** subi pas le système (efforts),
- ⇒ Le(s) **matériau(x)** (caractéristiques mécaniques),
- ⇒ La **géométrie** du système (formes et dimensions)

* De cette mise en relation en sort deux autres grandeurs importantes :

- ⇒ L'état de **contraintes** au sein de la matière,
- ⇒ L'état de **déformations** de la matière.



2 – CRITERES VISANT A REALISER LE DIMENSIONNEMENT

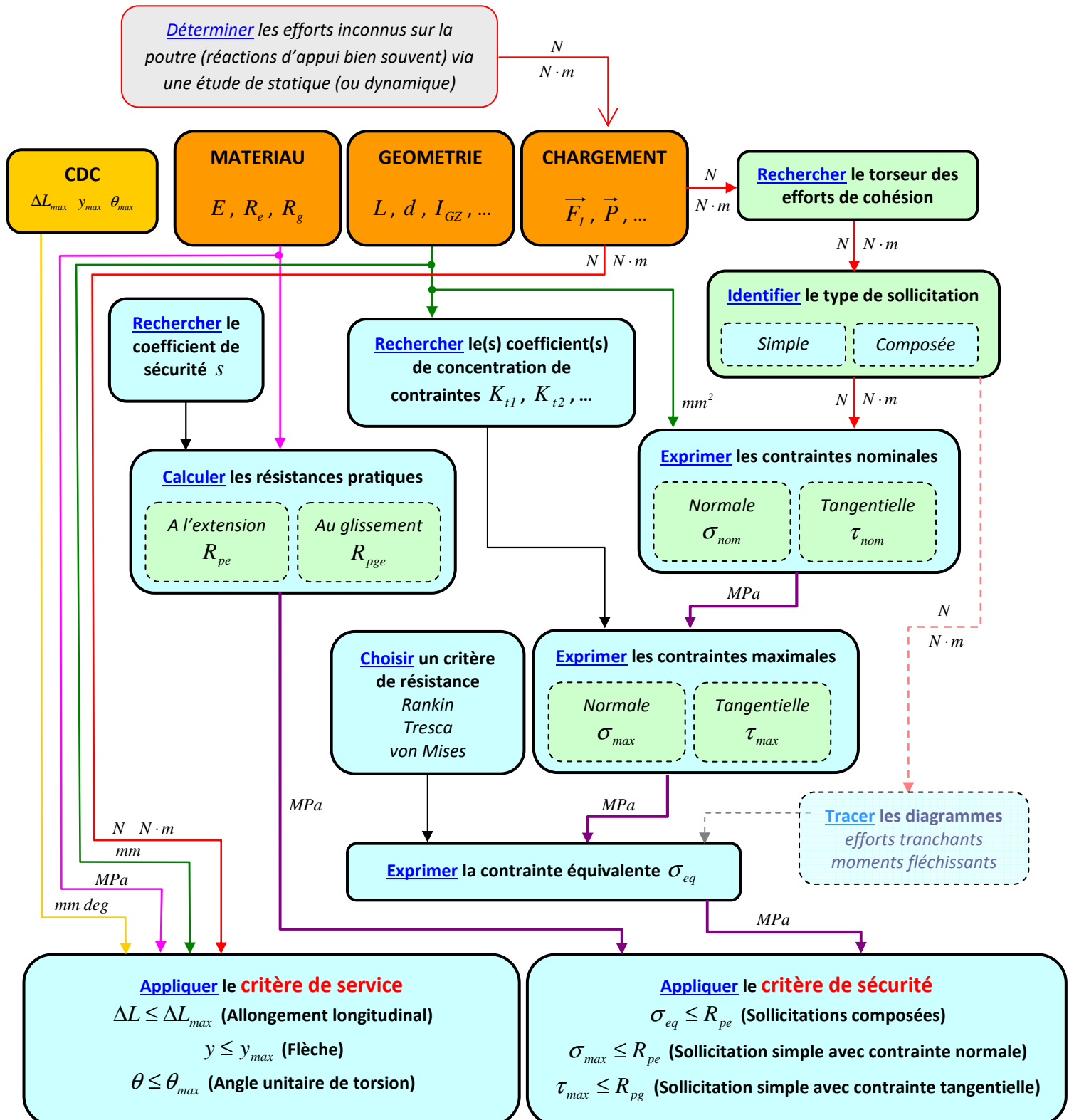
Sauf cas particulier, un bon dimensionnement consiste à faire en sorte que la structure :

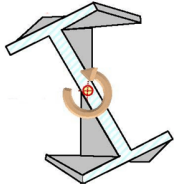
- **ne casse pas** ; c'est le « **critère de sécurité** » ; il est directement lié à l'état de contrainte et se traduit par la **condition de résistance**. Cette dernière peut être :
 - $\sigma_{max} \leq R_{pe}$ dans le cas d'une sollicitation simple source d'une unique contrainte normale σ ,
 - $\tau_{max} \leq R_{pg}$ dans le cas d'une sollicitation simple source d'une unique contrainte tangentielle τ ,
 - $\sigma_{eq} \leq R_{pe}$ dans le cas d'une sollicitation composée source de contraintes normale σ et tangentielle τ .
- **ne se déforme pas plus d'une limite donnée** par le cahier des charges ; c'est le « **critère de service** » ; il est directement lié à l'état de déformation et se traduit une ou plusieurs **conditions sur les déplacements** ; elles peuvent être :
 - $\Delta L \leq \Delta L_{max}$: limite sur l'allongement longitudinal en traction,
 - $y \leq y_{max}$: limite sur la flèche maximale en flexion,
 - $\theta \leq \theta_{max}$: limite sur l'angle de torsion unitaire en torsion.

3 – METHODE GENERALE DE RESOLUTION

Partant du triptyque « matériau » « géométrie » « chargement », on peut :

- Soit s'en donner deux et chercher le troisième via le critère de sécurité (obligatoire) et éventuellement le critère de service,
- Soit se donner les trois et voir s'ils vérifient (ou pas) le critère de sécurité et, si nécessaire, le critère de service.





RESISTANCE DES MATERIAUX

Moment quadratique d'une section

1 – PREAMBULE

L'analyse des contraintes dans une poutre et de ses déformations fait intervenir une grandeur caractéristique de la section droite étudiée appelée « moment quadratique » et parfois appelée « moment d'inertie ». On sait déjà qu'une section possède une aire mais, constatons-le, ce n'est pas sa seule propriété.

Le moment quadratique d'une section quantifie la distribution de la matière par rapport au centre de la section. Plus la matière est éloignée du centre, plus le moment quadratique est grand, et moins la poutre se déformera (toutes choses égales par ailleurs).

2 – DEFINITION GENERALE

Considérons dans une section d'aire totale S un petit élément de surface ds situé à distance y de l'axe \vec{x} et à distance x de l'axe \vec{y} .

Le moment quadratique élémentaire de l'élément de surface ds par rapport à l'axe $(O\vec{x})$ est égal au produit de la surface ds par le carré de sa distance à l'axe $(O\vec{x})$: $dI_{Ox} = y^2 \cdot ds$

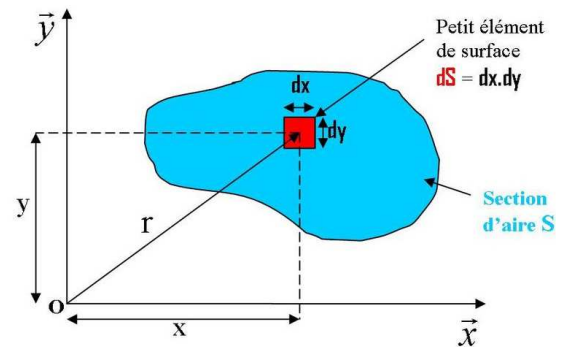
⇒ Le moment quadratique de toute la section est donc :

$$I_{Ox} = \int_S y^2 \cdot ds$$

Par analogie, on aura :

⇒ Le moment quadratique de toute la section par rapport à l'axe $(O\vec{y})$ est donc : $I_{Oy} = \int_S x^2 \cdot ds$

On utilise aussi le moment quadratique polaire (en torsion) : $I_o = \int_S r^2 \cdot ds$ avec $r^2 = x^2 + y^2$



3 – UNITES

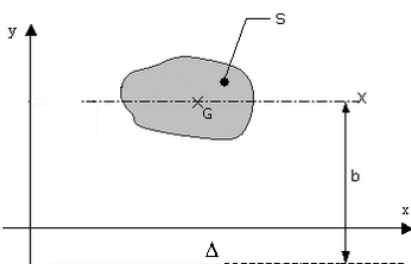
Le moment quadratique étant le produit du carré d'une distance avec une surface, il s'exprime en m^4 dans le système MKS. D'un point de vue pratique, on utilise souvent le mm^4 et parfois le cm^4 .

4 – THEOREME DE HUYGENS

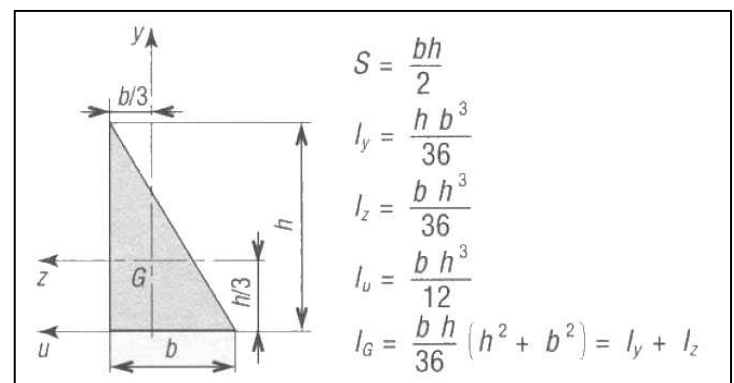
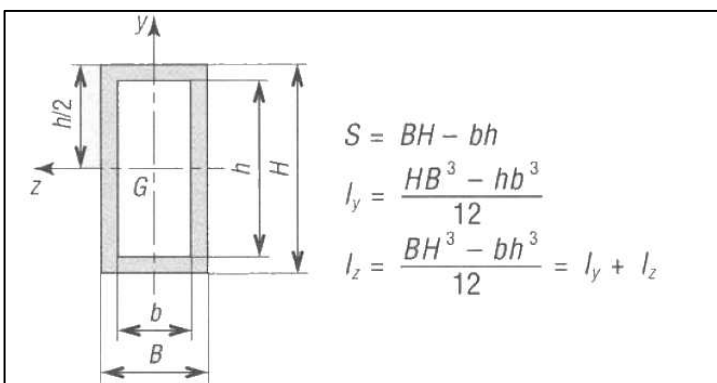
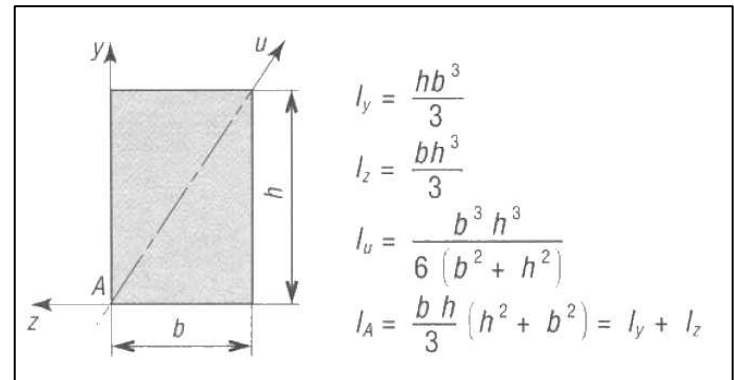
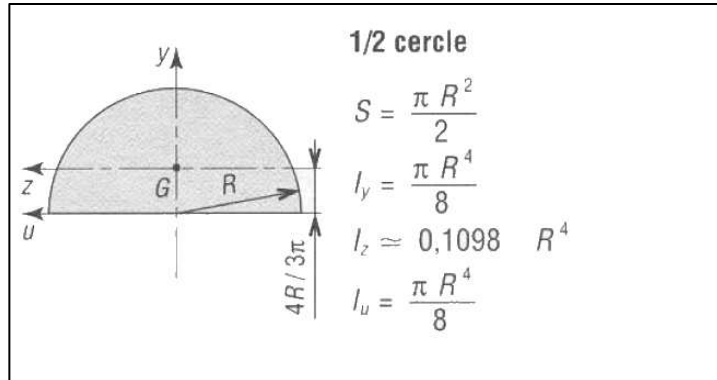
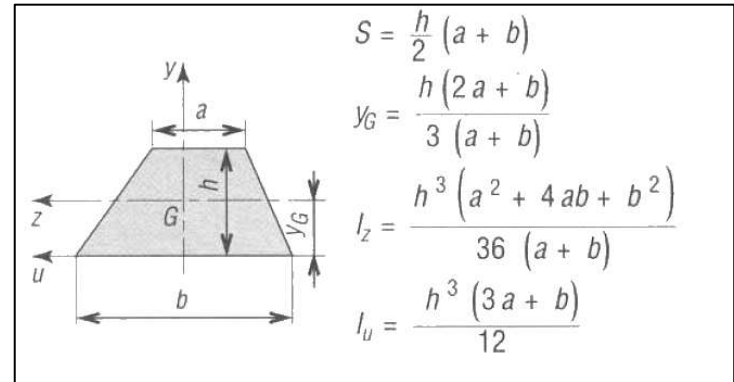
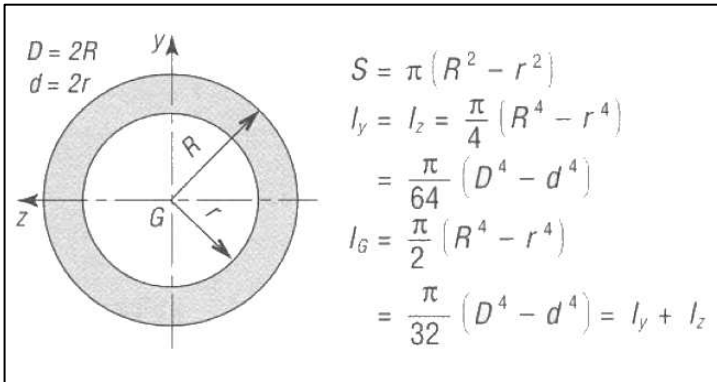
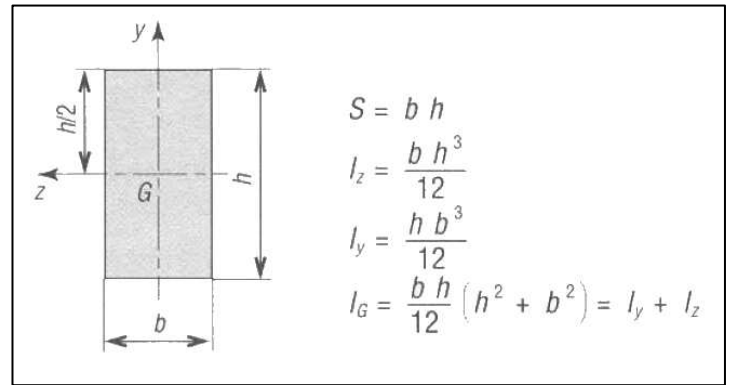
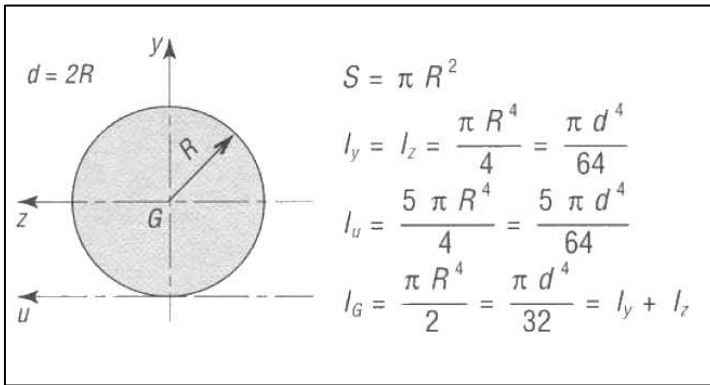
Soit une section de centre G et de surface S , I_{GX} est son moment quadratique par rapport à l'axe $(G\vec{x})$ et I_{Δ} celui par rapport à l'axe Δ .

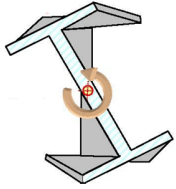
On a :

$$I_{\Delta} = I_{GX} + S \cdot b^2$$



5 – SURFACE ET MOMENTS QUADRATIQUES DE SECTIONS PARTICULIERES



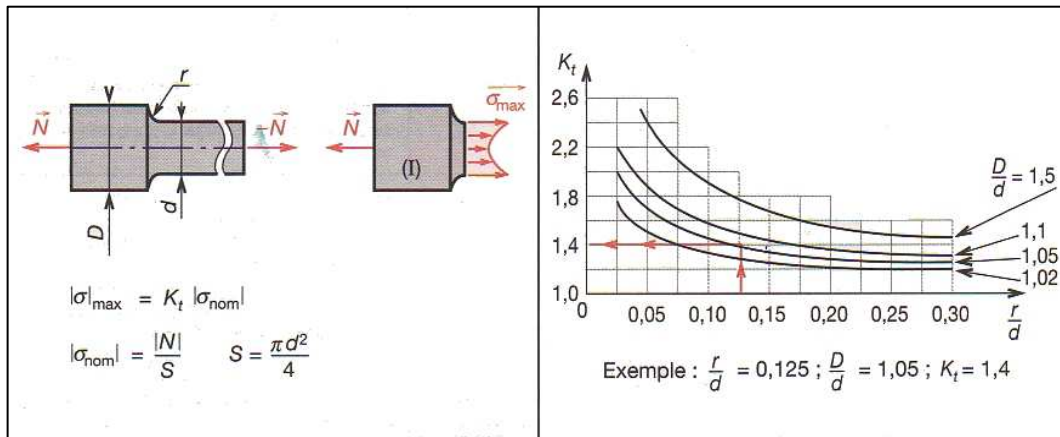


RESISTANCE DES MATERIAUX

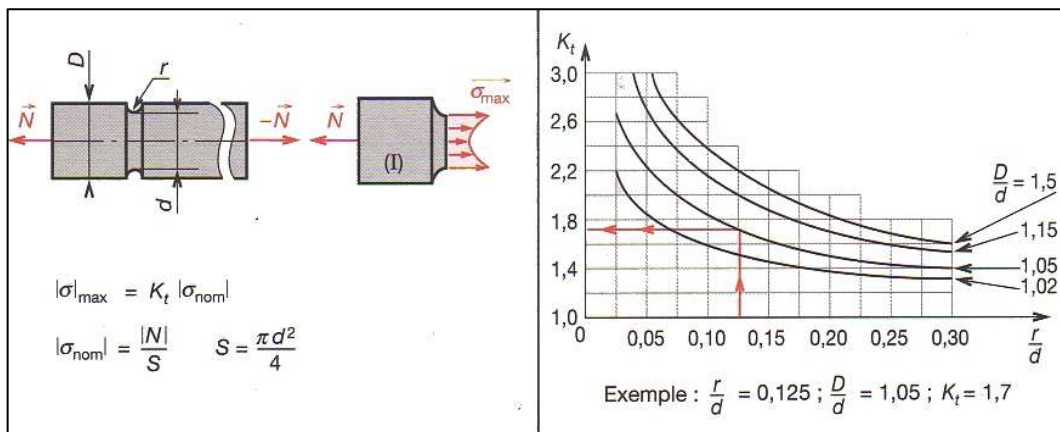
Coefficient de concentration de contrainte en traction

A2

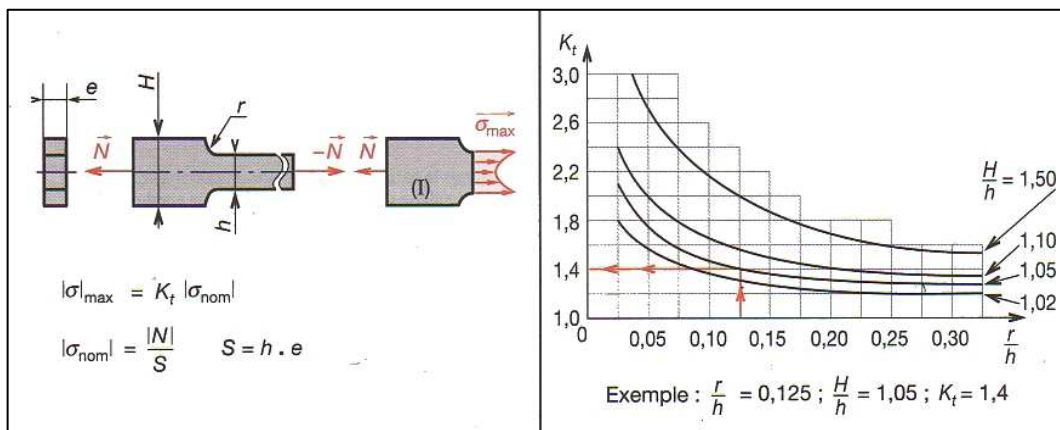
Arbre épaulé



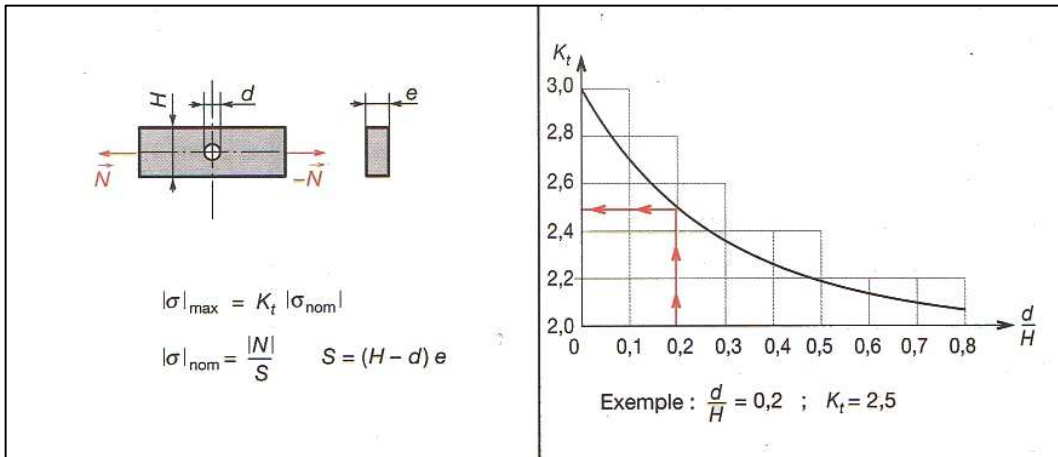
Arbre avec une gorge



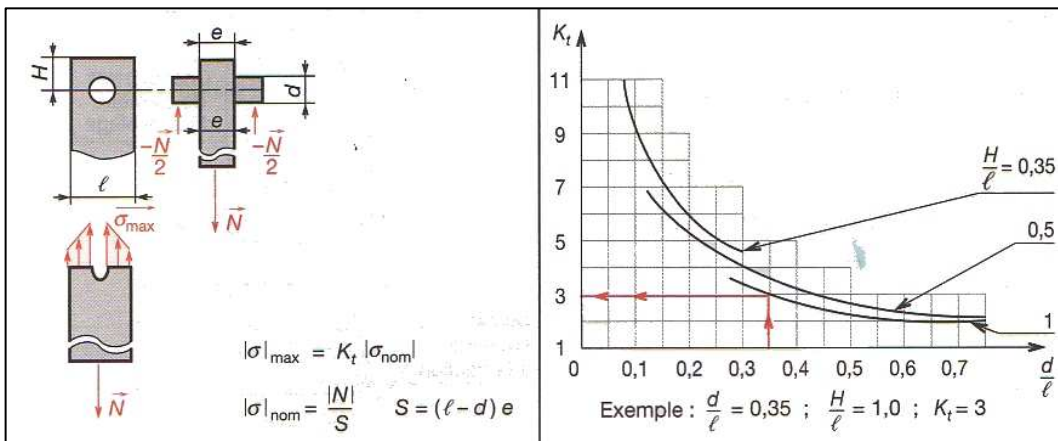
Plaque plane avec changement de section



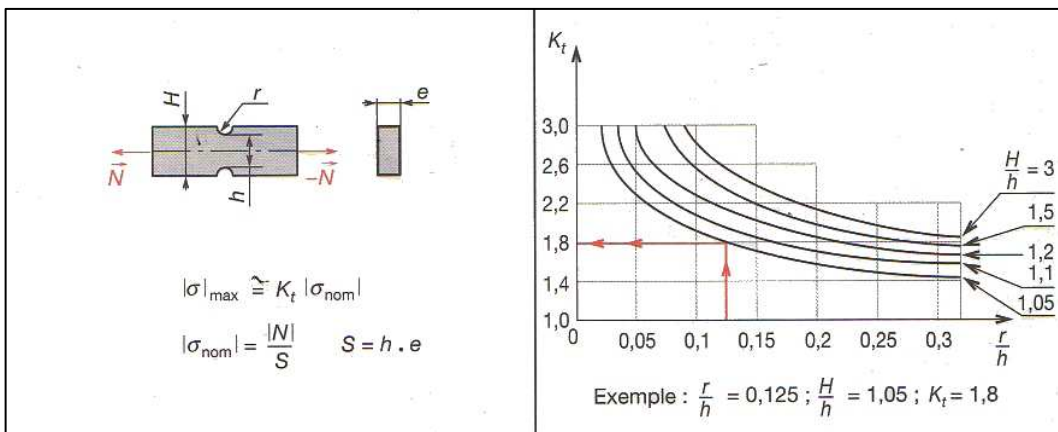
Plaque plane percée d'un trou (symétrique)

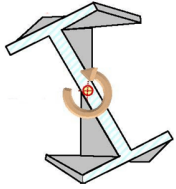


Plaque plane percée d'un trou à une extrémité



Plaque plane avec deux saignées sur les bords

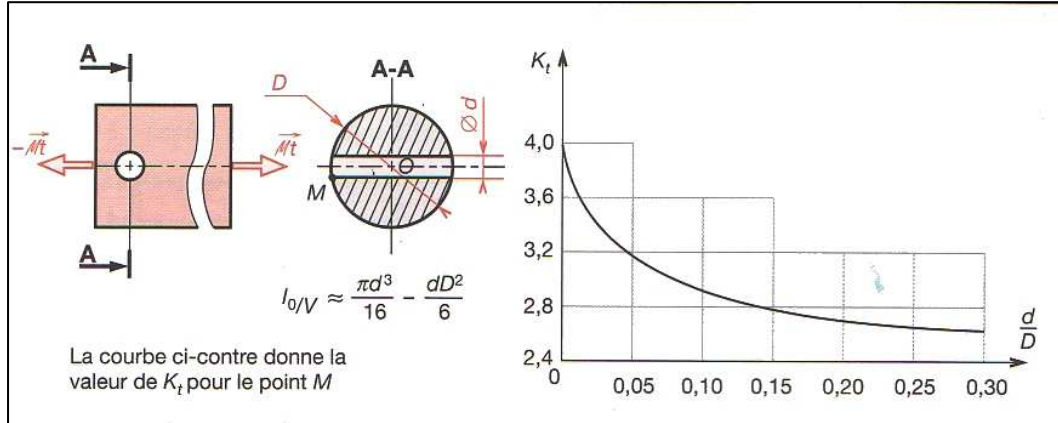




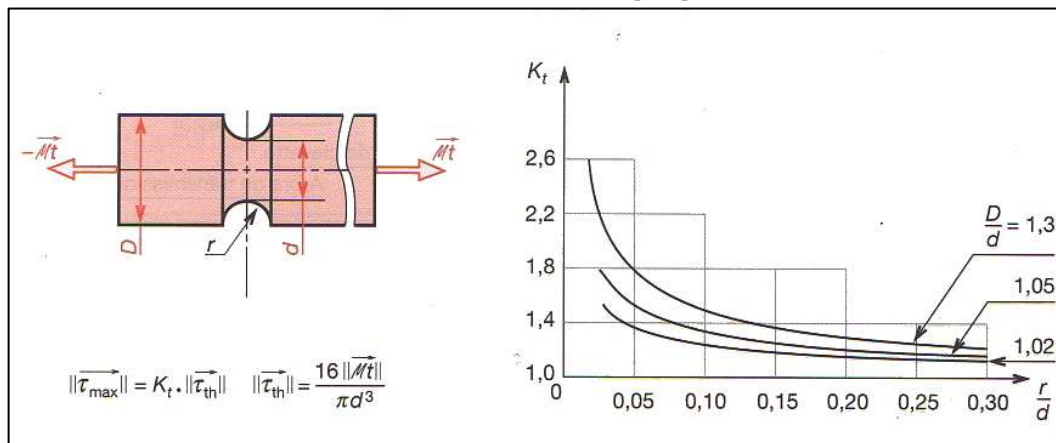
RESISTANCE DES MATERIAUX

Coefficient de concentration de contrainte en torsion

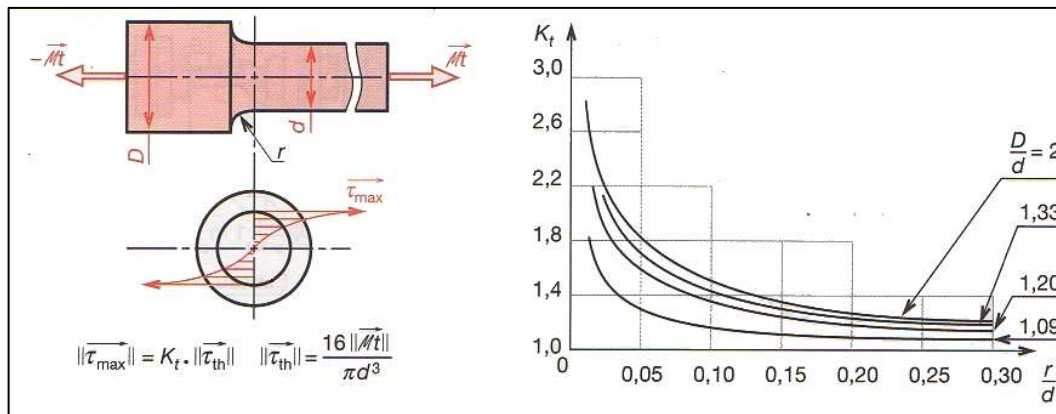
Arbre avec trou de goupille

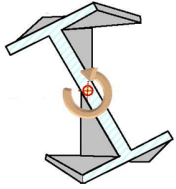


Arbre avec une gorge



Arbre avec un épaulement



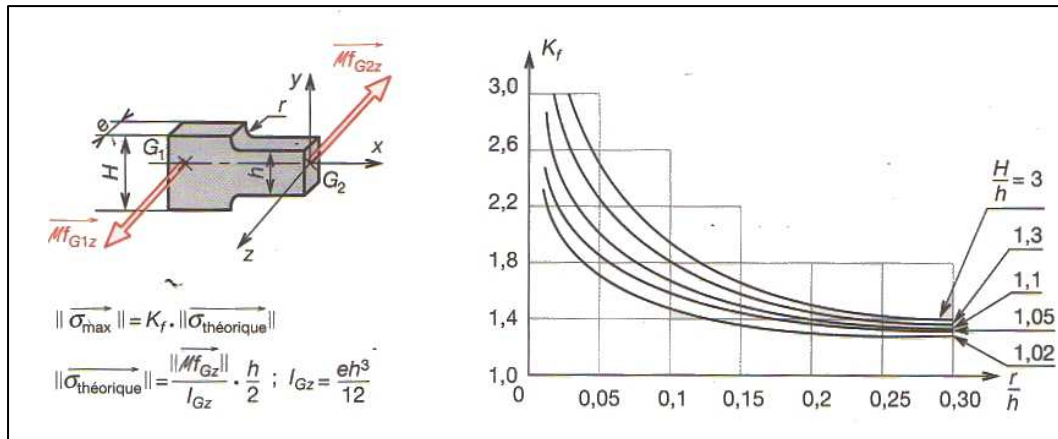


RESISTANCE DES MATERIAUX

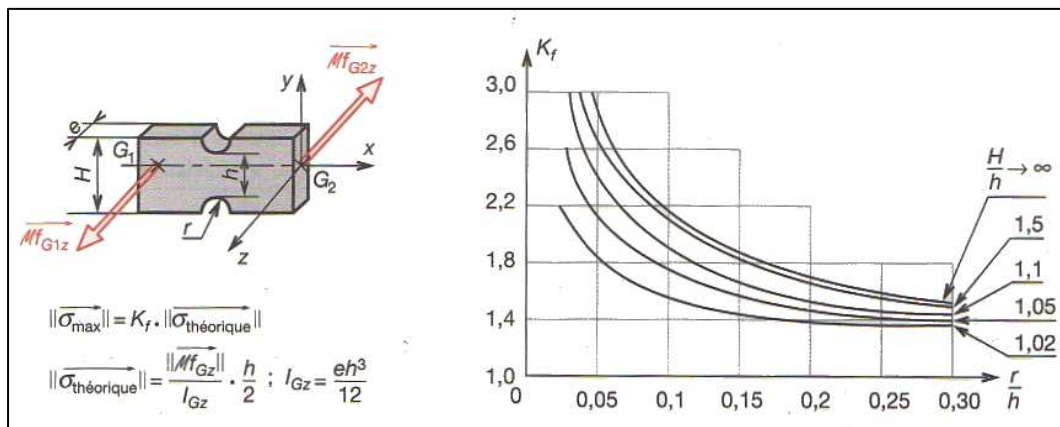
Coefficient de concentration de contrainte en flexion

A4

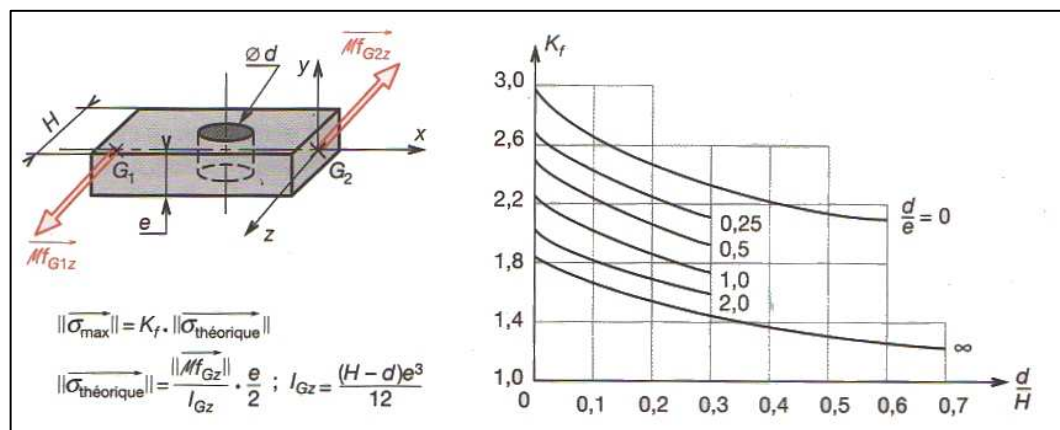
Plaque à section variable



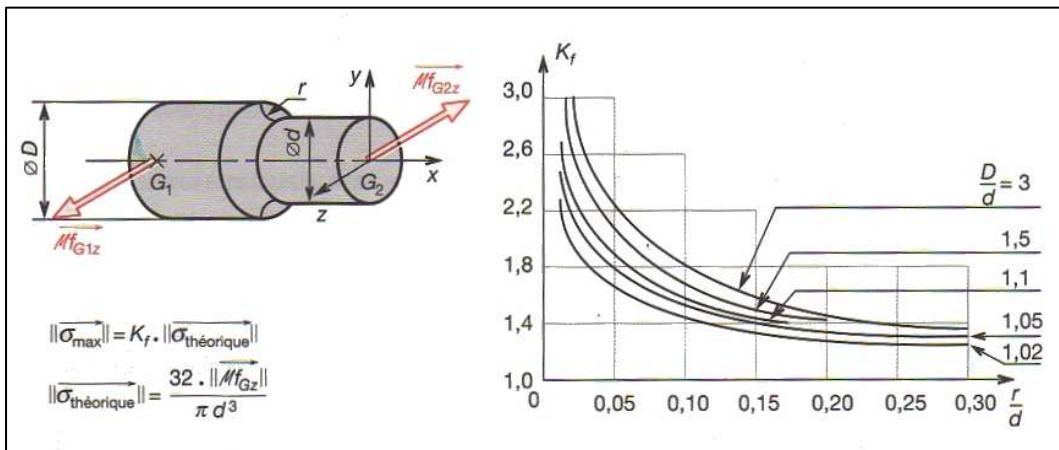
Plaque avec une saignée



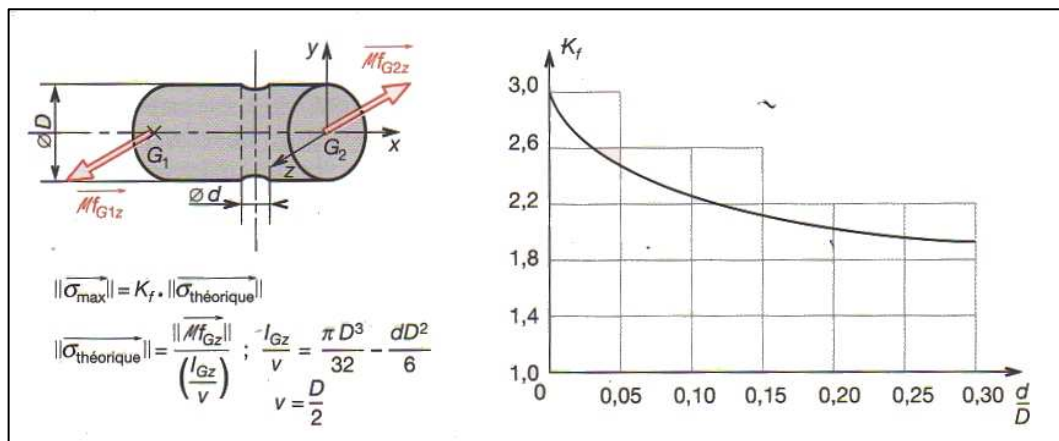
Plaque avec un trou



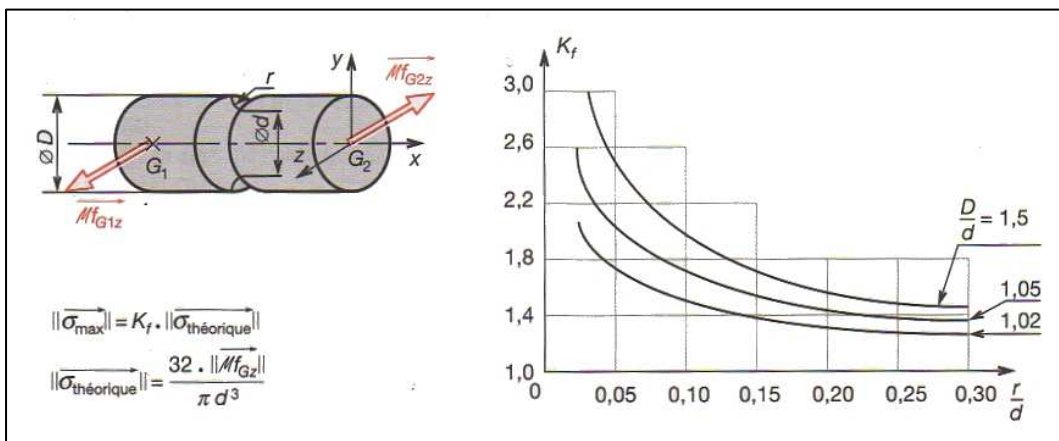
Arbre épaulé

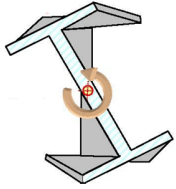


Arbre avec un perçage radial



Arbre avec une gorge

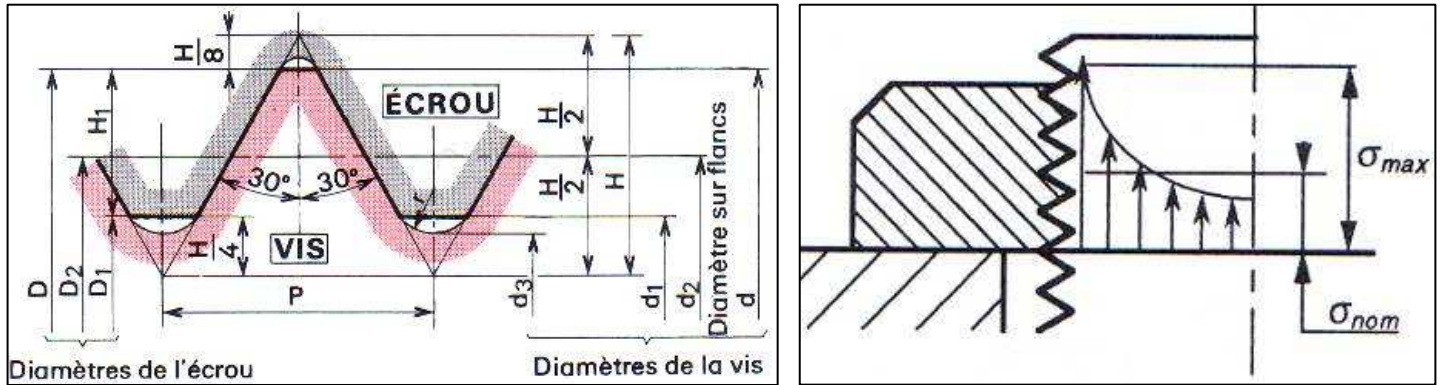




RESISTANCE DES MATERIAUX

Coefficient de concentration de contrainte dans les filetages

Pour les profils métriques ISO, le coefficient de concentration de contrainte est unique : $K_t = 2,5$.



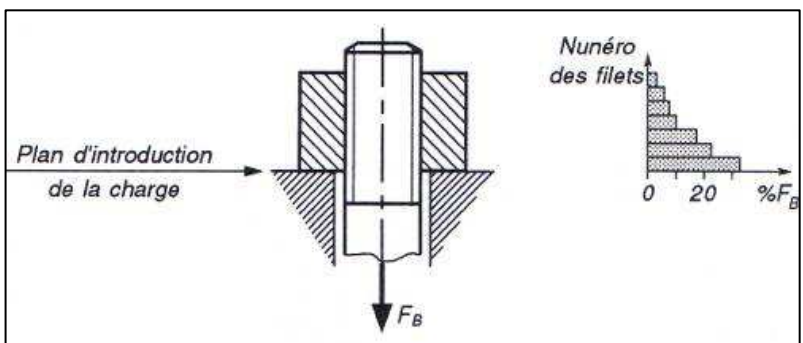
$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$$

Attention : Compte tenu de nombreuses incertitudes, la section du noyau à prendre dans les calculs doit être majorée.

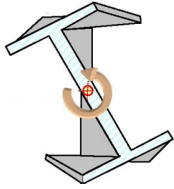
On utilise une section résistante A_s définie par :

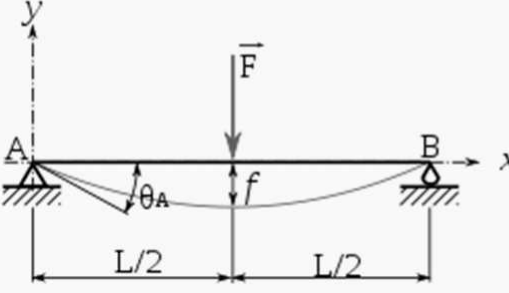
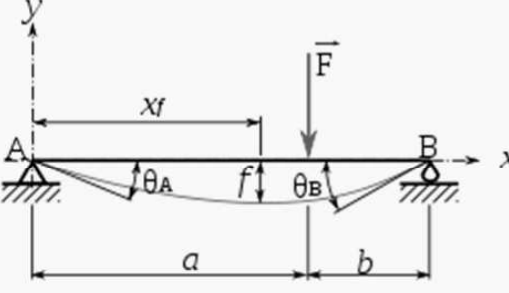
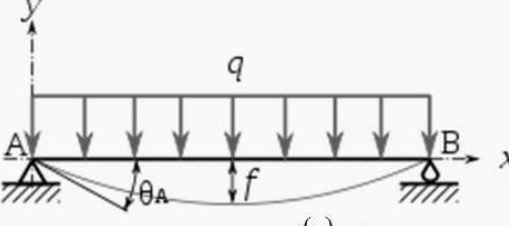
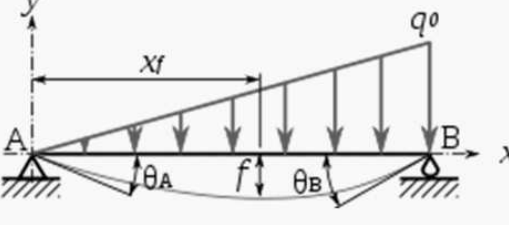
$$A_s = \frac{\pi}{4} \cdot d_{eq}^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(d_2 + d_3)^2}{2}$$

Exemple d'incertitude : répartition inégale de la charge sur le filet

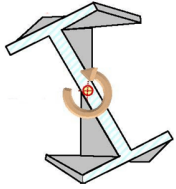


Valeurs de A_s pour les filetages métriques ISO		
\emptyset	Pas	Section résistante
mm	mm	mm ²
3	0,50	5,03
4	0,70	8,78
5	0,80	14,20
6	1,00	20,10
8	1,25	36,60
10	1,50	58,00
12	1,75	84,30
14	2,00	115,00
16	2,00	157,00
18	2,50	192,00
20	2,50	245,00
22	2,50	303,00
24	3,00	353,00
27	3,00	459,00
30	3,50	581,00
33	3,50	694,00
36	4,00	817,00
39	4,00	976,00



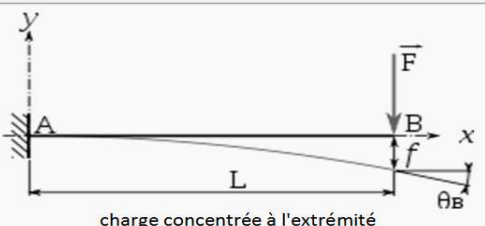
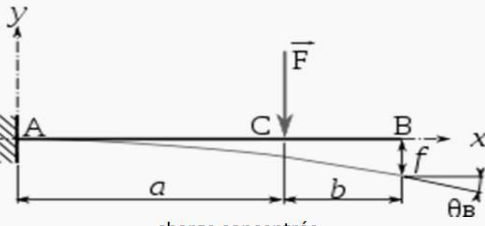
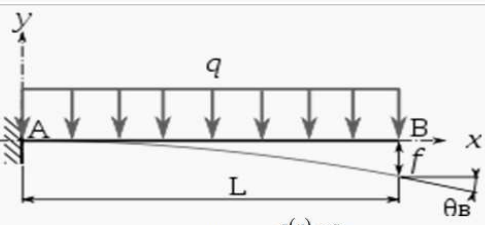
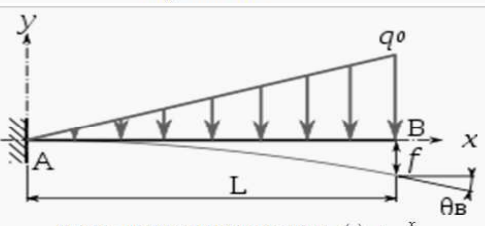
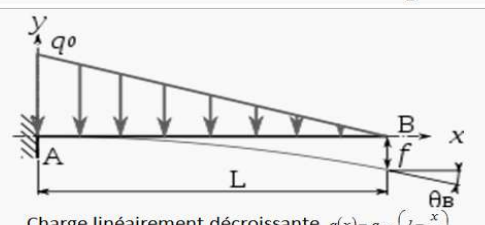
Sollicitation	Flèche	Pente
 <p>force concentrée en son centre</p>	$f = \frac{FL^3}{48EI} \quad x_f = \frac{L}{2}$	$-\theta_A = \theta_B = \frac{FL^2}{16EI}$
$y = \frac{-Fx}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$		
 <p>force concentrée</p>	$f = -\frac{Fb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ $x_f = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = \frac{Fab(L + b)}{EIL}$ $\theta_B = \frac{Fab(L + a)}{EIL}$
$x \leq a : y = \frac{Fbx}{6EIL} (x^2 + b^2 - L^2)$ $x \geq a : y = \frac{Fa}{6EIL} (x^3 - 3L^2x^2 + (a^2 + 2L^2)x - a^2L)$		
 <p>Charge uniforme $q(x) = q_0$</p>	$f = -\frac{5qL^4}{384EI} \quad x_f = \frac{L}{2}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$
$x \leq \frac{L}{2} : y = \frac{qx}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3)$		
 <p>Charge linéairement croissante $q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{L}$</p>	$f \simeq -\frac{0,00652q_0L^4}{384EI}$ $x_f \simeq 0,5193L$	$\theta_A = \frac{7q_0L^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{q_0L^3}{45EI}$
$y = \frac{q_0x}{360EI} (-3x^4 + 10L^2x^2 - 7L^4)$ $y = \frac{Cx}{6EIL} (x^2 - 3Lx + 2L^2)$		

Source : <http://fr.wikibooks.org/>



RESISTANCE DES MATERIAUX

Déformée d'une poutre isostatique encastrée

Sollicitation	Flèche	Pente
 <p>charge concentrée à l'extrémité</p>	$f = -\frac{FL^3}{3EI}$	$\theta_B = \frac{FL^2}{2EI}$
$y = \frac{F}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$		
 <p>charge concentrée</p>	$f = \frac{Fa^2}{6EI}(a - 3L)$	$\theta_B = \theta_C = \frac{Fa^2}{2EI}$
$x \leq a : y = \frac{F}{6EI}(x^3 - 3ax^2)$ $x \geq a : y = \frac{F}{6EI}(-3a^2x + a^3)$		
 <p>charge uniforme $q(x) = q_0$</p>	$f = -\frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
$y = \frac{-qx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$		
 <p>Charge linéairement croissante $q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{L}$</p>	$f = -\frac{11q_0L^4}{120EI}$	$\theta_B = \frac{q_0L^3}{8EI}$
$y = \frac{-q_0x^2}{120EIL}(x^3 - 10L^2x + 20L^3)$		
 <p>Charge linéairement décroissante $q(x) = q_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)$</p>	$f = -\frac{q_0L^4}{30EI}$	$\theta_B = \frac{q_0L^3}{24EI}$
$y = \frac{q_0x^2}{120EIL}(x^3 - 5Lx^2 + 10L^2x - 10L^3)$		

Source : <http://fr.wikibooks.org/>